

Dimensionamento Spatial Combiner Talbot

Sulla base delle equazioni matematiche analizzate nell'appendice di seguito si è realizzato un programma in matlab che visualizza il campo Elettromagnetico all'interno di una cavità realizzata in guida d'onda capace di supportare molti modi di ordine superiore realizzando un Combinatore Spaziale di tipo Talbot

il programma come ingresso richiede:

- 1) Frequenza di lavoro
- 2) Indice di rifrazione
- 3) Larghezza della guida di ingresso
- 4) Lunghezza della guida multimodale
- 5) Posizione dell'apertura di ingresso
- 6) quanto delle immagini di ripetizione
- 7) numero delle uscite delle immagini ricombinate
- 8) numero dei modi
- 9) risoluzione in x
- 10) risoluzione in z

in base a questi ingressi si ha:

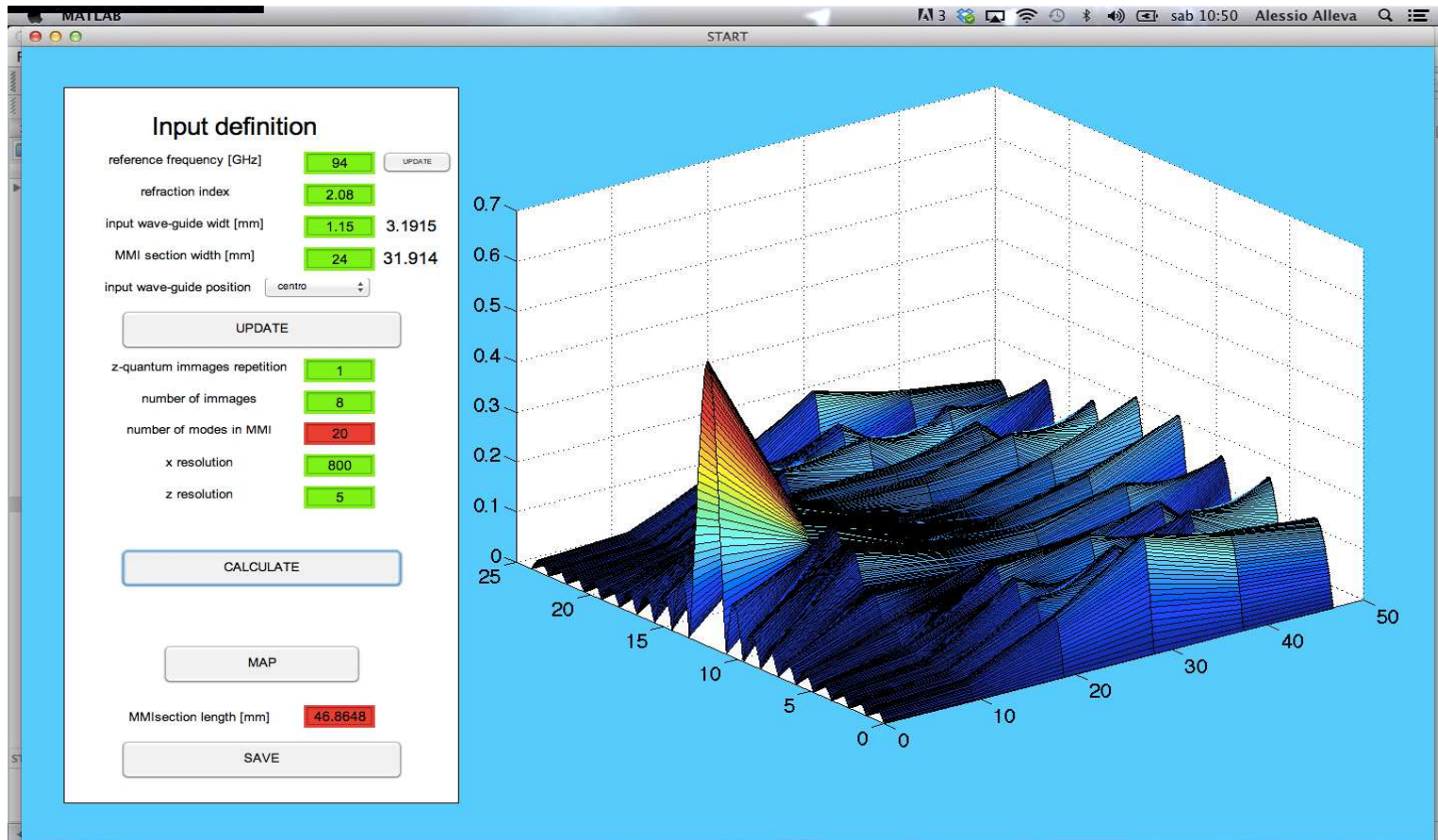
1. la mappatura del campo
2. Le frange di interferenza

Nelle pagine seguenti si mettono in evidenza
due casi diversi

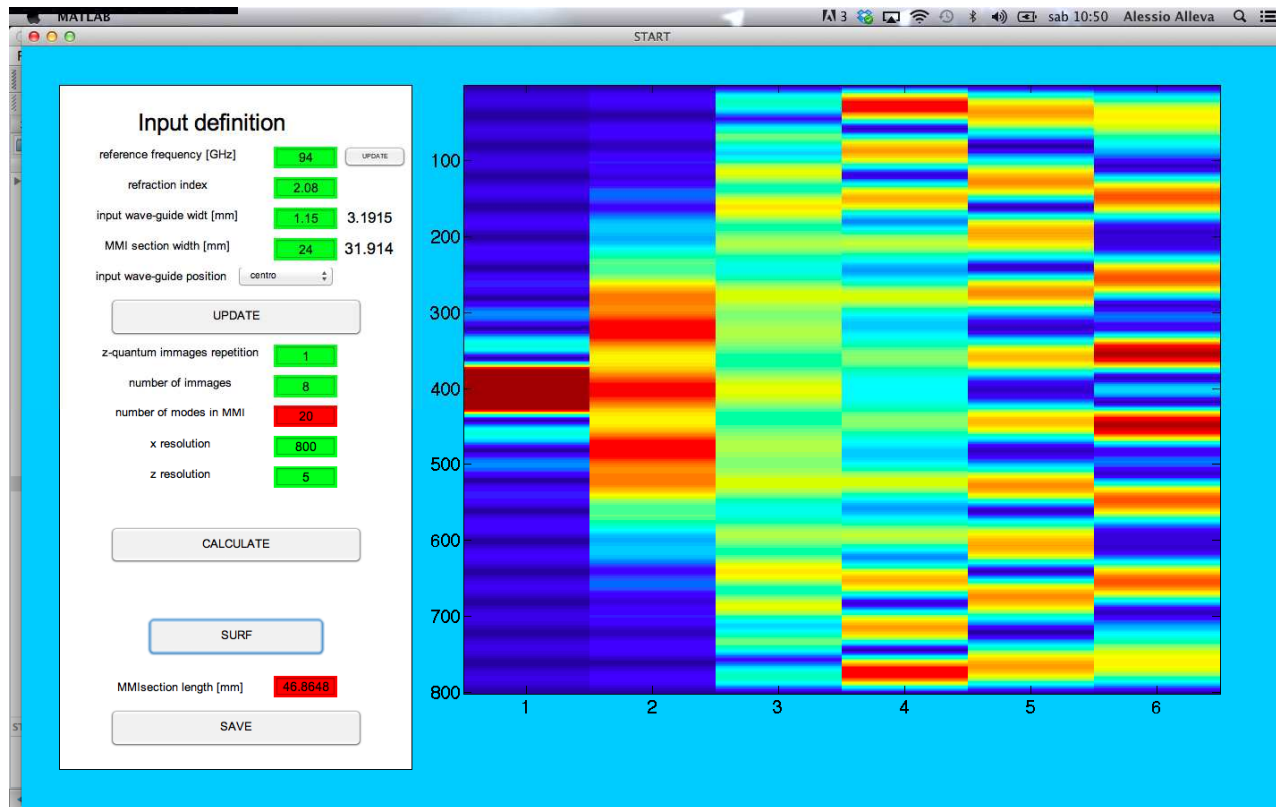
- Frequenza di lavoro=94 GHz
- Indice di rifrazione=2.08
- Larghezza della guida di ingresso=1.15mm
- Lunghezza della guida multimodale=24mm
- Posizione dell'apertura input= centro
- quanto delle immagini di ripetizione=1
- numero uscite di immagini ricombinate=8
- numero dei modi=20
- risoluzione in x=800
- risoluzione in z=5

- Frequenza di lavoro=40 GHz
- Indice di rifrazione=2.08
- Larghezza della guida di ingresso=1.35mm
- Lunghezza della guida multimodale=21mm
- Posizione dell'apertura input= centro
- quanto delle immagini di ripetizione=1
- numero uscite di immagini ricombinate=8
- numero dei modi=15
- risoluzione in x=800
- risoluzione in z=5

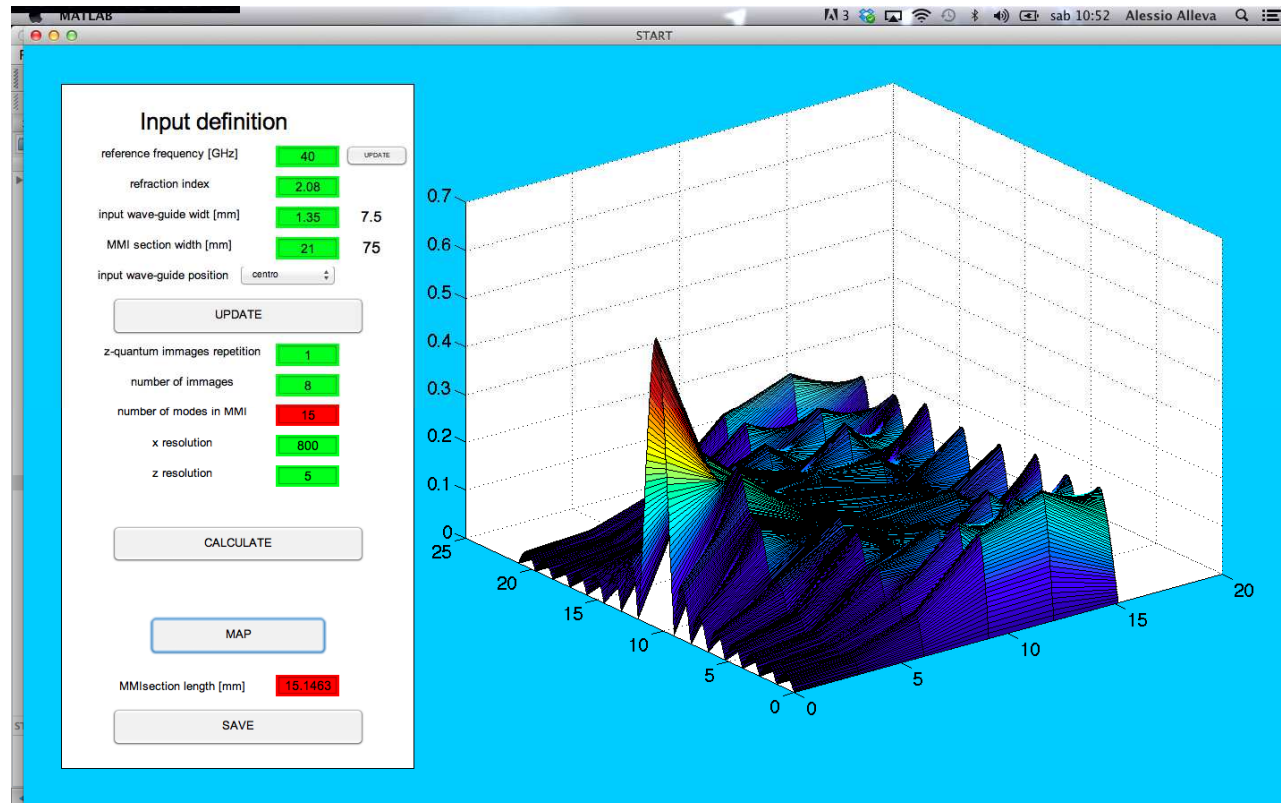
Distribuzione del campo a 94 GHz



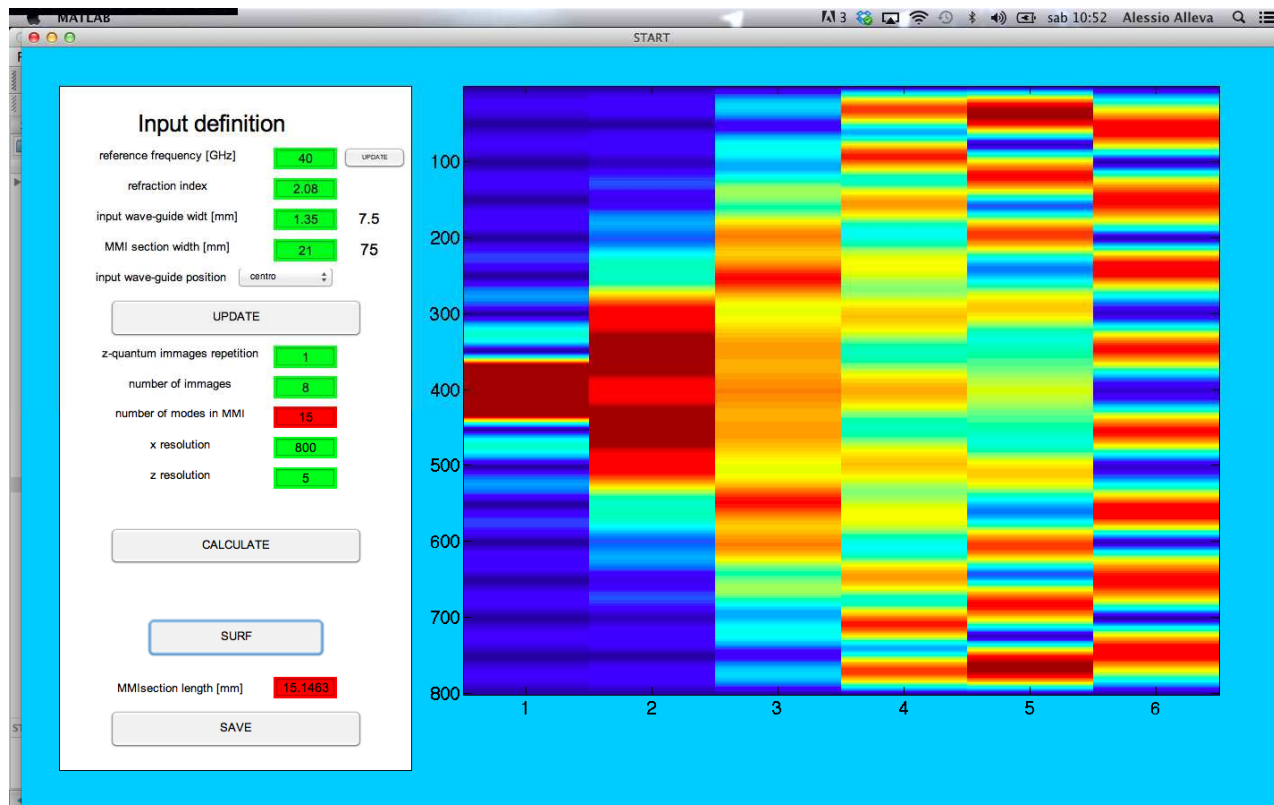
Interferenze dei modi a 94 GHz



Distribuzione del campo a 40 GHz



Interferenze dei modi a 40 GHz



Appendice

Appunti sull'articolo:

Optical Multi-Mode Interference Devices Based on Self-Imaging : Principles and Applications

Lucas B. Soldano and Erik C. M. Pennings

General self-imaging properties in $N \times N$ multimode interference couplers including phase relations

M. Bachmann, P. A. Besse, and H. Melchior

Interferenza multimodale usando l'analisi di modi di propagazione in guida d'onda descritto da TALBOT

Introduzione

- L'applicazione principale dell'**Interferenza Multi Modale** MMI risiede nell'Ottica Integrata
- Si cerca di risolvere analiticamente il problema della determinazione del Pattern di Interferenza in modo da utilizzarlo per ottenere dispositivi

Sommario

- La Prima parte dell'articolo è dedicata alla descrizione del Principio dell'auto-immagine (self-imaging) (Section II)
- La seconda evidenzia le proprietà basilari delle guide d'onda multimodali (Section III)
- La terza parte descrive la formazione dell'immagine data dall'Interferenza Multimodale Generale e Ristretta (Section IV e Section V)
- La quarta parte tratta la progettazione e il comportamento dei dispositivi (Section VI)

Principio dell'Auto-Immagine (Section II)

- Strutture Guidanti self-focusing (graded index) possono riprodurre immagini reali periodiche di un oggetto
- *Self-Imaging* è una proprietà delle guide d'onda multimodali per mezzo delle quali un profilo di campo in ingresso è riprodotto in una immagine singola o multipla ad intervalli periodici lungo l'asse di propagazione della guida

Proprietà delle guide d'onda multimodali (Section III) *Costante di propagazione*

- Struttura basilare della MMI è la Guida d'onda che supporta un largo numero di modi (tipicamente ≥ 3)
- Necessità di un'analisi di propagazione full-mode per la descrizione del fenomeno MMI
- La guida supporta m modi laterali (non trasversi $a \gg b$) e la Costante di propagazione β_v ed il numero d'onda k_{yv} sono legati tramite l'indice di rifrazione n_r dalla

$$k_{yv}^2 + \beta_v^2 = k_0^2 n_r^2$$

con

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$k_{yv} = \frac{(v+1)\pi}{W_{ev}}$$

Proprietà delle guide d'onda multimodali (Section III)

Spazio della Costante di propagazione

Per $k_{y\nu}^2 \ll k_0^2 n_r^2$

Si ha la costante di propagazione

$$\beta_\nu \approx k_0 n_r - \frac{(\nu + 1)^2 \pi \lambda_0}{4 n_r W_e^2}$$

Definendo la lunghezza di interferenza dei due modi più bassi come $L_\pi \equiv \frac{\pi}{\beta_0 - \beta_1} \approx \frac{4 n_r W_e^2}{3 \lambda_0}$

Lo spazio della costante di propagazione sarà

$$(\beta_0 - \beta_\nu) \approx \frac{\nu(\nu + 2)\pi}{3L_\pi}$$

Proprietà delle guide d'onda multimodali (Section III)

Analisi della propagazione dei modi guidati

- Per un **campo incidente** a $z=0$ scomposto negli m modi e tutto contenuto in W_e della guida dato da

$$\Psi(y,0) = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{\nu} \psi_{\nu}(y)$$

- Il profilo a distanza z sarà

$$\Psi(y,z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{\nu} \psi_{\nu}(y) \exp[j(\omega t - \beta_{\nu} z)]$$

- Se la fase del fondamentale è comune si avrà (escludendo la dipendenza con t)

$$\Psi(y,z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{\nu} \psi_{\nu}(y) \exp[j(\beta_0 - \beta_{\nu})z]$$

- Il profilo a distanza $z=L$ sarà

$$\Psi(y,L) = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{\nu} \psi_{\nu}(y) \exp\left[j \frac{\nu(\nu+2)\pi}{3L_{\pi}} L \right]$$

La configurazione del campo e le immagini formate dipendono dall'**eccitazione** c_{ν} e **dalla fase** dell'esponenziale

Proprietà delle guide d'onda multimodali (Section III)

Analisi della propagazione dei modi guidati

- le proprietà della fase si possono vedere dall'esponenziale

$$\exp\left[j\frac{\nu(\nu+2)\pi}{3L_\pi}L\right]$$

- Il campo $\Psi(y, L)$ (in certe condizioni) sarà una riproduzione (self-imaging) dell'ingresso $\Psi(y, 0)$

Per cui potremo avere:

- *General Interferences* che sono **indipendenti dall'eccitazione**
- *Restricted Interferences* che sono ottenute soltanto **eccitando certi modi**

nella formula di campo possiamo considerare

I modi e la dipendenza da y secondo tali condizioni

$$\nu(\nu+2) = \begin{cases} \textit{pari} & \text{Per } \nu \text{ pari} \\ \textit{dispari} & \text{Per } \nu \text{ dispari} \end{cases} \quad \psi_\nu(-y) = \begin{cases} \psi_\nu(y) & \text{Per } \nu \text{ pari} \\ -\psi_\nu(y) & \text{Per } \nu \text{ dispari} \end{cases}$$

General Interference: Meccanismo d'interferenza indipendente dall'eccitazione ($c_v=c$) ma dipende dalla periodicità dell'esponenziale

Immagine Singole e Immagini multiple

Immagine Singole:

- $\Psi(y, l)$ sarà un'immagine di $\Psi(y, 0)$ se $\exp\left[j \frac{\nu(\nu+2)\pi}{3L_\pi} L\right] = 1$ Oppure $(-1)^\nu$
ovvero

$$\Psi(y, L) = c \sum_{\nu=0}^{m-1} \psi_\nu(y) = c [\psi_0(y) + \psi_1(y) + \psi_2(y) + \dots] \quad (1) \quad \text{oppure} \quad \Psi(y, L) = c \sum_{\nu=0}^{m-1} \psi_\nu(y) (-1)^\nu = c [\psi_0(y) - \psi_1(y) + \psi_2(y) + \dots] \quad (2)$$

Nel primo caso la variazione di fase di tutti i modi lungo L differisce di **interi di 2π** quindi tutti i modi interferiscono con la stessa fase **come in $z=0$ replicando il campo di ingresso [(1) in fig. 3]**

Nel secondo caso le variazioni di fase devono essere **alternativamente multipli pari o dispari di π** e quindi **i modi pari saranno in fase e quelli dispari in contofase**

La fase dell'esponenziale sopra scritto sarà soddisfatto in tutti i casi per

$$L = p(3L_\pi) \quad \text{con } p=0,1,2,\dots \text{ rispettivamente con } p \text{ pari e } p \text{ dispari}$$

In particolare per $p=2$ $L=2(3L_\pi)$ soddisfa il primo caso per qualsiasi ν in quanto

Per $\nu=0$	$\nu(\nu+2)=0$
Per $\nu=1$	$\nu(\nu+2)=3$
Per $\nu=2$	$\nu(\nu+2)=8$
Per $\nu=3$	$\nu(\nu+2)=15$
Per $\nu=4$	$\nu(\nu+2)=24$

$$\frac{\nu(\nu+2)\pi}{3L_\pi} L = \frac{\nu(\nu+2)\pi}{3L_\pi} 2(3L_\pi) = \nu(\nu+1)2\pi \quad \text{sempre multipli di } 2\pi$$

General Interference: Meccanismo d'interferenza indipendente dall'eccitazione (c_v)
ma dipende dalla periodicità dell'esponenziale

Immagine Singole e Immagini multiple

Immagine Singole:

In particolare per $p=1$ $L=(3L_\pi)$ si soddisfa il secondo caso per qualsiasi v in quanto

Per $v=0$	$v(v+2)=0$	$\frac{v(v+2)\pi}{3L_\pi} L = \frac{v(v+2)\pi}{3L_\pi} (3L_\pi) = v(v+1)\pi$
Per $v=1$	$v(v+2)=3$	
Per $v=2$	$v(v+2)=8$	
Per $v=3$	$v(v+2)=15$	
Per $v=4$	$v(v+2)=24$	

sempre multipli di π ma pari per i modi pari e dispari per i modi dispari

come mostrato nella figura seguente e si avranno Immagini Singole. [(2) in fig. 3]

General Interference (Section IV)

Immagini Singole e Immagini multiple

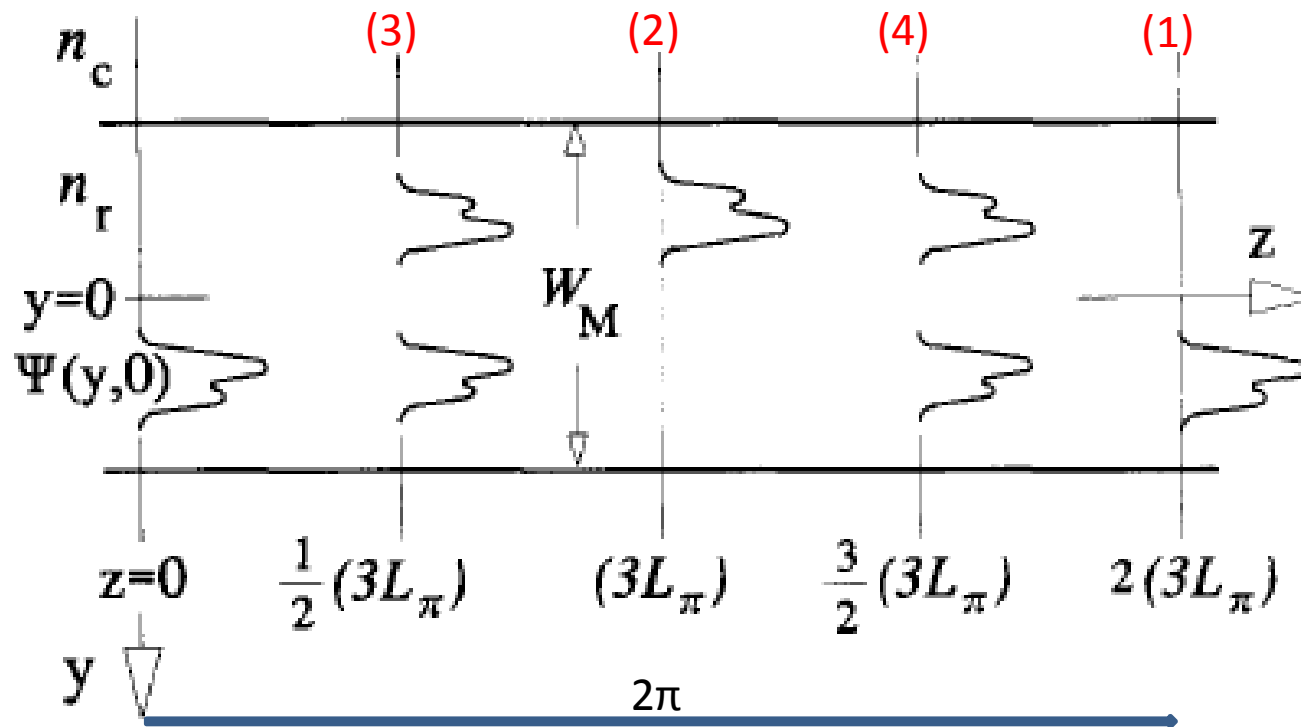


Fig. 3. Multimode waveguide showing the input field $\Psi(y, 0)$, a mirrored single image at $(3L_\pi)$, a direct single image at $2(3L_\pi)$, and two-fold images at $\frac{1}{2}(3L_\pi)$ and $\frac{3}{2}(3L_\pi)$.

General Interference (Section IV)

Immagini Singole e Immagini multiple

Immagini Multiple

- Le immagini che si troveranno a mezzo cammino tra la posizione diretta e quella specchiata ovvero a distanza

$$L = \frac{p}{2}(3L_\pi) \quad \text{con } p=1,3,5,\dots$$

Dovranno avere la differenza di fase in quadratura, infatti andando a sostituire la precedente formula

- Avranno un campo totale pari a

$$\Psi\left(y, \frac{p}{2}3L_\pi\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu \psi_\nu(y) \exp\left[j\nu(\nu+2)p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad \text{Con } p \text{ intero dispari}$$

Tenendo conto delle proprietà

$$\nu(\nu+2) = \begin{cases} \text{pari} & \text{Per } \nu \text{ pari} \\ \text{dispari} & \text{Per } \nu \text{ dispari} \end{cases} \quad \psi_\nu(-y) = \begin{cases} \psi_\nu(y) & \text{Per } \nu \text{ pari} \\ -\psi_\nu(y) & \text{Per } \nu \text{ dispari} \end{cases}$$

Si ha

$$\Psi\left(y, \frac{p}{2}3L_\pi\right) = \sum_{\nu \text{ even}} c_\nu \psi_\nu(y) + \sum_{\nu \text{ odd}} (-j)^p c_\nu \psi_\nu(y) = \frac{1+(-j)^p}{2} \Psi(y,0) + \frac{1-(-j)^p}{2} \Psi(-y,0)$$

Che rappresenta **coppie di immagini** di $\psi(y,0)$ in quadratura e ampiezza pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}$

A distanza $z = \frac{1}{2}(3L_\pi), \frac{3}{2}(3L_\pi), \dots$ **[(3) e (4) in fig. 3]**

General Interference (Section IV)

Immagini Singole e Immagini multiple

In generale immagini multiple ripiegate (folded) sono formate in posizioni intermedie di z

Espressione analitica per le posizioni e le fasi delle immagini folded (ref. [22]) sono riportate:

Introducendo un campo periodico in ingresso $\Psi_{in}(y)$ come estensione periodica di $\Psi_{in}(y, 0)$ con periodo $2W_e$ e antisimmetrica rispetto a al piano $y=0$

$$\Psi_{in}(y) \equiv \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [\Psi(y - v2W_e, 0) - \Psi(-y - v2W_e, 0)]$$

e per approssimare l'ampiezza del modo di campo con funzione sinusoidale

$$\psi_v(y) \approx \sin(k_{yv} y)$$

Quindi l'eccitazione può essere considerata come un'espansione (spaziale) di Fourier che a distanza L

$$L = \frac{p}{N} (3L_\pi) \quad (p \geq 0, N \geq 1) \quad \text{interi e senza divisore comune}$$

Il campo sarà della forma

$$\Psi(y, L) = \frac{1}{C} \sum_{q=0}^{N-1} \Psi_{in}(y - y_q) \exp(j\varphi_q) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} y_q &= p(2q - N) \frac{W_e}{N} \\ \varphi_q &= p(N - q) \frac{q\pi}{N} \end{aligned}$$

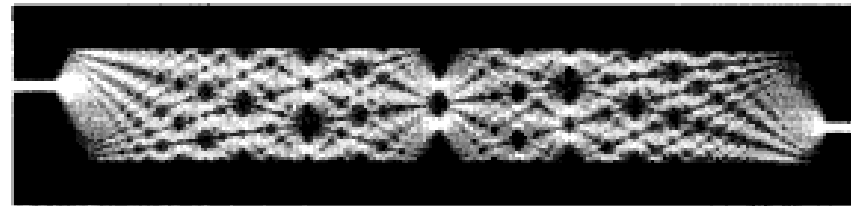
Ove C costante complessa con $|C| = \sqrt{N}$, p è la periodicità lungo z , q si riferisce a ciascuna delle N immagini lungo y

General Interference (Section IV)

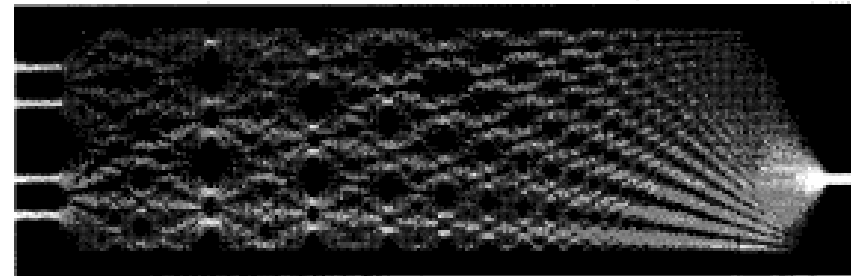
Immagini Singole e Immagini multiple

Le equazioni precedenti mostrano che: a distanza $z=L$ ci sono N immagini del campo $\Psi_{in}(y)$

Localizzate a $y=y_q$ ciascuna di ampiezza $\frac{1}{\sqrt{N}}$ e fase φ_q generalmente non equi-spaziate



(a)



(b)

Fig. 5. Theoretical light intensity patterns corresponding to general or paired interference mechanisms in two multimode waveguides, leading to a mirrored single image (a), and a 4-fold image (b). Note also the multi-fold images at intermediate distances, non-equally spaced along the lateral axis. Reproduced by kind permission of J. M. Heaton, ©British Crown Copyright DRA 1992.

Restricted Interference (Section V)

Interferenza Accoppiata e Interferenza Simmetrica

Soltanto alcuni modi guidati sono eccitati dai campi di ingresso nella guida multimodale:

Interferenza accoppiata se si nota che:

$$\text{mod}_3[\nu(\nu + 2)] = 0 \quad \nu \neq 2, 5, 8, \dots$$

Allora la molteplicità sarà ridotta di un fattore 3 se

$$c_\nu = 0 \quad \nu \neq 2, 5, 8, \dots$$

Quindi **immagini singole** del campo di ingresso $\Psi(y, 0)$ sono ottenute a

$$L = p(L_\pi) \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

se i modi $\nu = 2, 5, 8, \dots$ non sono eccitati nella guida multimodale

2 immagini sono a $L = \frac{p}{2}(L_\pi)$ con p dispari

e **N immagini** saranno trovate a distanza

$$L = \frac{p}{N}(L_\pi) \quad p \geq 0 \text{ e } N \geq 1$$

Tutto ciò ad es. lanciando un campo simmetrico (gaussiano) $\Psi(y, 0)$ a $y = \pm W_e/6$

Restricted Interference (Section V)

Interferenza Accoppiata e Interferenza Simmetrica

Un modo possibile di ottenere una eccitazione selettiva si ottiene lanciando un campo simmetrico (gaussiano) $\Psi(y,0)$ a $y = \pm W_e/6$

In queste posizioni di y i modi $v=2,5,8\dots$ presentano uno zero a simmetria dispari

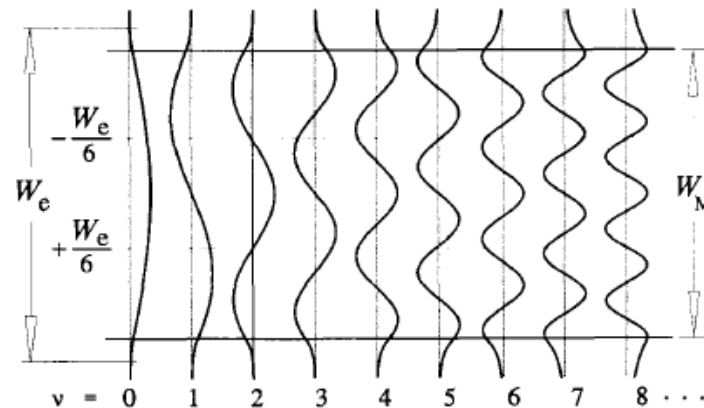


Fig. 2. Example of amplitude-normalized lateral field profiles $\psi_\nu(y)$, corresponding to the first 9 guided modes in a step-index multimode waveguide.

La sovrapposizione dei campi tra i campi in ingresso simmetrici e i modi del campo (antisimmetrici) svanirà e quindi $c_\nu = 0$ con $v=2,5,8\dots$

In caso di eccitazione selettiva i modi che contribuiscono alla creazione dell'immagine sono accoppiati 0-1,3-4,6-7,..e hanno proprietà simili

(ad esempio ciascun modo pari porta il suo modo partner dispari ad una differenza di fase pari a $\pi/2$ in $z=L_\pi/2$ (lunghezza a 3dB) e ad una differenza di fase pari a π in $z=L_\pi$ (lunghezza di cross accoppiamento)). [Tale meccanismo è detto Interferenza Accoppiata](#)

Restricted Interference (Section V)

Interferenza Accoppiata e Interferenza Simmetrica

Interferenza Simmetrica

Come visto in precedenza Divisori ad N-vie possono aversi a nella posizione $L = \frac{p}{N}(3L_\pi)$

Si possono fare 4 volte più corti eccitando soltanto i modi pari simmetrici notando che

$$\text{mod}_4 [v(v+2)] = 0 \quad p \text{ pari}$$

Quindi sarà ridotto di 4 volte se

$$c_v = 0 \quad v=1,3,5,\dots$$

Quindi singole immagini saranno ottenute per

$$L = p \left(\frac{3L_\pi}{4} \right) \quad p=0,1,2,\dots$$

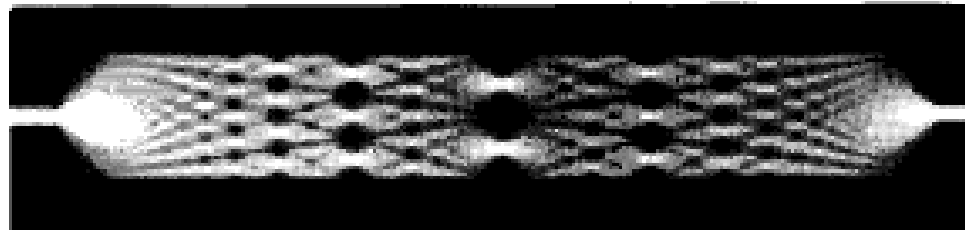
Se non sono eccitati modi dispari nella guida multimodale (eccitando la guida al centro con campi simmetrici). In generale si avranno N immagini del campo di ingresso a distanza

$$L = \frac{p}{N} \left(\frac{3L_\pi}{4} \right)$$

Allocate simmetricamente lungo l'asse y equispaziate di W_e/N

Restricted Interference (Section V)

Interferenza Accoppiata e Interferenza Simmetrica



(a)



(b)

Fig. 7. Theoretical light intensity patterns corresponding to (single-input) symmetric interference mechanisms in a 20- μm -wide multimode waveguide, showing "1 \times 1" imaging (a); and in a 40- μm -wide multimode waveguide, showing 1-to-4 way splitting (b). Note also the multi-fold images at intermediate distances, equally spaced along the lateral axis. Reproduced by kind permission of J. M. Heaton *et al.* [34]. ©British Crown Copyright DRA 1992.

General self-imaging properties including phase relations

M. Bachmann, P. A. Besse, and H. Melchior

Una derivazione completa delle proprietà del self-imaging che determina una espressione compatta per la posizione, l'ampiezza e le fasi delle immagini è data risolvendo analiticamente l'equazione della sovrapposizione degli autovalori per gli accoppiatori MMI di lunghezza $(M/N) 3L_c$ dove L_c è la lunghezza dell'accoppiamento dei due modi di ordine più basso ed M ed N interi positivi senza divisore comune. N determina il numero di immagini M è la periodicità.

Distribuzioni arbitrarie in ingresso sono scomposte in modi guidati della sezione MMI e ricomposti in uscita come sovrapposizione di N immagini e si troverà un'espressione in forma chiusa per le posizioni, le ampiezze e le fasi delle immagini stesse.

Definizione del Problema e rappresentazione agli autovalori

Teoria analitica per determinare Ampiezza, fase e posizione delle auto-immagini

- Decomposizione agli autovalori

- La teoria è sviluppata per ogni distribuzione di ingresso del campo $f(x)$
- La distribuzione di ingresso $f(x)$ è decomposta negli autovalori della guida
- La teoria rimane corretta in caso di campo molto confinato in cui $f(x)$ è rappresentata solo dai modi guidati e quando sono eccitati soltanto i modi di ordine più basso.
- La distribuzione di campo lungo x è rappresentata dalla figura seguente:
 - Ove la scomposizione in autovalori genera una distribuzione di ingresso simmetrica rispetto a x con periodicità $2W$

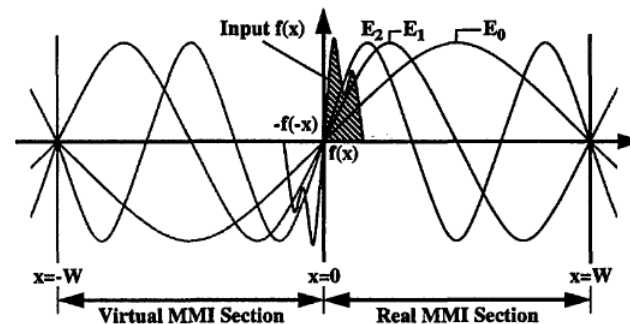


Fig. 3. MMI section with input light distribution $f(x)$ and decomposition into guided eigenmodes $E_i(x)$ of the structure. For theoretical purposes the functions $E_i(x)$ and $f(x)$ are antisymmetrically extended to a virtual MMI section and periodically repeated in the $\pm x$ directions.

Definizione del Problema e rappresentazione agli autovalori

Teoria analitica per determinare Ampiezza, fase e posizione delle auto-immagini

- Decomposizione agli autovalori

- I campi con periodicità $2W$ sono scomposti in autovalori nella sezione MMI nella forma

$$E_i(x) = \sin \left[\pi (i+1) \frac{x}{W} \right] \quad \text{con } i=0,1,2,\dots$$

- Le costanti di propagazione trasverse

$$k_{xi} = (i+1) \frac{\pi}{W}$$

- Sono legate alla costante di propagazione longitudinale dalla formula

$$\beta_i^2 = n^2 k_0^2 - k_{xi}^2$$

- Usando la approssimazione parassiale $\beta_i \approx nk_0 - \frac{k_{xi}^2}{2nk_0}$ si ha

$$\beta_0 \approx nk_0 - \frac{\Delta\beta_{01}}{3} \quad \Delta\beta_{01} = \beta_0 - \beta_1 \approx \frac{3\pi^2}{2nk_0 W^2} \quad \beta_i \approx \beta_0 - i(i+2) \frac{\Delta\beta_{01}}{3}$$

Definizione del Problema e rappresentazione agli autovalori

Teoria analitica per determinare Ampiezza, fase e posizione delle auto-immagini

- Decomposizione agli autovalori

- Usando la decomposizione spaziale di Fourier possiamo scrivere $f_{in}(x)$ come sovrapposizione degli infiniti autovalori $E_i(x)$ con i coefficienti a_i

$$f_{in}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i E_i(x)$$

$$a_i = \frac{2}{W} \int_0^W f(x) E_i^*(x) dx$$

Ove $f(x)$ è identica a $f_{in}(x)$ in $0 \leq x \leq W$

- Distribuzione del campo di uscita

- Nel caso di accoppiatori di lunghezza

$$L_N^M = \frac{M}{N} 3L_c = \frac{M}{N} \frac{3\pi}{\Delta\beta_{01}}$$

Ove L_c è la lunghezza di accoppiamento tra i due modi di ordine più basso $L_c = \pi / \Delta\beta_{01}$

- N rappresenta il numero di autoimmagini
- M rappresenta la molteplicità della lunghezza del dispositivo

Definizione del Problema e rappresentazione agli autovalori

Teoria analitica per determinare Ampiezza, fase e posizione delle auto-immagini

- Tutti i modi si ricompongono a distanza L_N^M

Dando il campo di uscita paria a

$$f_{out}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i E_i(x) e^{-j\beta_i L_N^M}$$

Ricordando che

$$\beta_i \approx \beta_0 - i(i+2) \frac{\Delta\beta_{01}}{3} \quad L_N^M = \frac{M}{N} 3L_c = \frac{M}{N} \frac{3\pi}{\Delta\beta_{01}}$$

Si ha

$$f_{out}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i E_i(x) e^{-j\beta_i L_N^M} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i E_i(x) e^{\left(-j\beta_0 L_N^M + j\pi \frac{M}{N} i(i+1)\right)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A_i E_i(x)$$

Definizione del Problema e rappresentazione agli autovalori

Teoria analitica per determinare Ampiezza, fase e posizione delle auto-immagini

- Con

$$A_i = e^{\left(-j\beta_0 L_N^M + j\pi \frac{M}{N} i(i+1)\right)}$$

A_i tiene conto delle variazioni di fase e si può scrivere

- $A_0 = e^{(-j\beta_0 L_N^M)} \quad \text{e} \quad A_i = A_{i-1} e^{\left(j\pi \frac{M}{N} i(i+1)\right)}$

Dagli autovalori alle auto immagini

- Le precedenti equazioni non danno informazioni sulla posizione, sull'ampiezza e sulla fase delle immagini multiple

possiamo manipolare matematicamente ottenendo:

$$f_{out}(x) = \frac{1}{c} \sum_{q=0}^{N-1} f_{in}(x - x_q) e^{j\varphi_q}$$

Abbiamo la somma di N immagini alla posizione x_q e fase φ_q

Ove le posizioni e le fasi sono date da

$$x_q = (2q - N) \frac{M}{N} W \quad \varphi_q = q(N - q) \frac{M}{N} \pi$$

Dagli autovalori alle auto immagini

- Le costanti complesse di normalizzazione sono date da

$$C = e^{j\beta_0 L_N^M} \sum_{q=0}^{N-1} e^{\left[-j\pi \frac{x_q}{W} + j\varphi_q\right]}$$

$$C = e^{\left(j\beta_0 L_N^M + j\pi \frac{M}{N}\right)} \sum_{q=0}^{N-1} e^{\left[j\pi \frac{M}{N} q(N-q)\right]}$$

con $|C| = \sqrt{N}$

per $M=1$

$$C = \sqrt{N} e^{\left[j\beta_0 L_N^{M=1} + j\frac{\pi}{N} + j\frac{\pi}{4}(N-1)\right]}$$

Dagli autovalori alle auto immagini

- Mentre i coefficienti A_i sono riformulati come segue introducendo al loro posto B_i

$$B_i = \frac{1}{C} \sum_{q=0}^{N-1} e^{j\Phi_{i,q}}$$

con

$$\Phi_{i,q} = -\pi(i+1)\frac{x_q}{W} + \varphi_q$$

Esercizio 1

- Decomposizione agli autovalori
- Considerare il campo di ingresso secondo la scomposizione in autovalori
 - I campi con periodicità $2W$ sono scomposti in autovalori nella sezione MMI nella forma
 - Considerare dapprima 3 autovalori

$$E_i(x) = \sin\left[\pi(i+1)\frac{x}{W}\right] \quad \text{con } i=0,1,2,.$$

$$E_0(x) = \sin\left[\pi\frac{x}{W}\right] \quad E_1(x) = \sin\left[2\pi\frac{x}{W}\right] \quad E_2(x) = \sin\left[3\pi\frac{x}{W}\right]$$

illuminazione uniforme $f(x) = 1$

$$f_{in}(x) = \sum_{i=0}^2 a_i E_i(x) = a_0 E_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2$$

$$a_i = \frac{2}{W} \int_0^w f(x) E_i^*(x) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{W} \int_0^w f(x) E_0^*(x) dx = \frac{2}{W} \int_0^w \sin\left[\pi\frac{x}{W}\right] dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{W} \int_0^w f(x) E_1^*(x) dx = \frac{2}{W} \int_0^w \sin\left[2\pi\frac{x}{W}\right] dx = 0$$

$$a_2 = \frac{2}{W} \int_0^w f(x) E_2^*(x) dx = \frac{2}{W} \int_0^w \sin\left[3\pi\frac{x}{W}\right] dx = \frac{4}{3\pi}$$

$$f_{in}(x) = a_0 E_0(x) + a_1 E_1(x) + a_2 E_2(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left[\pi\frac{x}{W}\right] + 0 + \frac{4}{3\pi} \sin\left[3\pi\frac{x}{W}\right] = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin\left[\pi\frac{x}{W}\right] + \frac{1}{3} \sin\left[3\pi\frac{x}{W}\right] \right\}$$

Esercizio 1

- Vogliamo la Distribuzione del campo di uscita

– Nel caso di accoppiatori di lunghezza $L_N^M = \frac{M}{N} 3L_c = \frac{M}{N} \frac{3\pi}{\Delta\beta_{01}}$

Ove L_c è la lunghezza di accoppiamento tra i due modi di ordine più basso $L_c = \pi / \Delta\beta_{01}$

N rappresenta il numero di autoimmagini

M rappresenta la molteplicità della lunghezza del dispositivo

$$f_{out}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i E_i(x) e^{-j\beta_i L_N^M} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i E_i(x) e^{\left(-j\beta_0 L_N^M + j\pi \frac{M}{N} i(i+2)\right)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A_i E_i(x)$$

Con $A_0 = e^{\left(-j\beta_0 L_N^M\right)}$ e $A_i = A_{i-1} e^{\left(j\pi \frac{M}{N} i(i+1)\right)}$

Esercizio 1

- Vogliamo la Distribuzione del campo di uscita
 - Considerando 3 auto immagini $N=3$ e un dispositivo con molteplicità $M=1$

$$L_{N=3}^{M=1} = \frac{1}{3} 3L_c = L_c = \frac{\pi}{\Delta\beta_{01}}$$

$$A_0 = e^{(-j\beta_0 L_N^M)} = e^{-j\beta_0 L_c} = e^{-j\beta_0 \frac{\pi}{\Delta\beta_{01}}}$$

$$A_1 = A_0 e^{(j\pi \frac{M}{N}(1+1))} = A_0 e^{(j\pi \frac{1}{3} 2)} = e^{-j\beta_0 \frac{\pi}{\Delta\beta_{01}}} e^{(j\pi \frac{2}{3})}$$

$$A_2 = A_1 e^{(j\pi \frac{1}{3} 2(2+1))} = A_1 e^{(j2\pi)} = e^{-j\beta_0 \frac{\pi}{\Delta\beta_{01}}} e^{(j\pi \frac{2}{3})} e^{(j2\pi)}$$

$$f_{out}(x) = \sum_{i=0}^2 a_i A_i E_i(x) = a_0 A_0 E_0(x) + a_1 A_1 E_1(x) + a_2 A_2 E_2(x) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left\{ \sin \left[\pi \frac{x}{W} \right] e^{-j\beta_0 \frac{\pi}{\Delta\beta_{01}}} + \frac{1}{3} \sin \left[3\pi \frac{x}{W} \right] e^{-j\beta_0 \frac{\pi}{\Delta\beta_{01}}} e^{(j\pi \frac{2}{3})} e^{(j2\pi)} \right\}$$

Esercizio 2

- Formule che diano evidenza delle immagini multiple di $f_{in}(x)$
- Formule che determinano la posizione, l'ampiezza e la fase delle immagini multiple

Se vogliamo 4 immagini

$$f_{out}(x) = \frac{1}{C} \sum_{q=0}^{N-1} f_{in}(x-x_q) e^{j\varphi_q} = \frac{1}{C} \sum_{q=0}^3 f_{in}(x-x_q) e^{j\varphi_q} =$$

$$\frac{1}{C} \left[f_{in}(x-x_0) e^{j\varphi_0} + f_{in}(x-x_1) e^{j\varphi_1} + f_{in}(x-x_2) e^{j\varphi_2} + f_{in}(x-x_3) e^{j\varphi_3} \right]$$

alle posizioni x_q e fasi φ_q con $M=1$ e $N=4$

$$x_q = (2q - N) \frac{M}{N} W$$

$$x_0 = (-4) \frac{1}{4} W = -W$$

$$x_1 = (2-4) \frac{1}{4} W = -\frac{1}{2} W$$

$$x_2 = (2q - N) \frac{M}{N} W = (4-4) \frac{1}{4} W = 0$$

$$x_3 = (2 \times 3 - 4) \frac{1}{4} W = \frac{1}{2} W$$

$$\varphi_q = q(N - q) \frac{M}{N} \pi$$

$$\varphi_0 = 0(4-0) \frac{1}{4} \pi = 0$$

$$\varphi_1 = 1 \times (4-1) \frac{1}{4} \pi = \frac{3}{4} \pi$$

$$\varphi_2 = 2(4-2) \frac{1}{4} \pi = \pi$$

$$\varphi_3 = 3(4-3) \frac{1}{4} \pi = \frac{3}{4} \pi$$

Esercizio 2

$$\begin{aligned}
 f_{out}(x) &= \frac{1}{C} \left[f_{in}(x-x_0)e^{j\varphi_0} + f_{in}(x-x_1)e^{j\varphi_1} + f_{in}(x-x_2)e^{j\varphi_2} + f_{in}(x-x_3)e^{j\varphi_3} \right] = \\
 &= \frac{1}{C} \left[f_{in}(x+W)e^{j0} + f_{in}\left(x+\frac{W}{2}\right)e^{j\frac{3}{4}\pi} + f_{in}(x-0)e^{j\pi} f_{in}\left(x-\frac{W}{2}\right)e^{j\frac{3}{4}\pi} \right]
 \end{aligned}$$

Per $M=1$

$$C = \sqrt{N} e^{\left[j\beta_0 L_N^{M=1} + j\frac{\pi}{N} + j\frac{\pi}{4}(N-1) \right]} = 2e^{\left[j\beta_0 \frac{3}{4}L_c + j\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{4}3 \right]} = 2e^{\left[j\beta_0 \frac{3}{4}\Delta\beta_{01} + j\pi \right]}$$